ძვირფასო სტუდენტებო,
დავალების შესრულების დაწყებამდე,
გთხოვთ, ჯერ გაეცნოთ განმარტებით წერილს

მათემატიკა ეკონომიკისა და ბიზნესისათვის 2

დავალება №21. არასაკუთრივი ინტეგრალები

ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში მოცემული სავარჯიშოები აღებულია სილაბუსში მითითებული [2] სალექციო კურსიდან, კერძოდ, ლექცია 21-ის ბოლო პუნქტში მოყვანილი სავარჯიშოებიდან. გამუქებულია იმ ტიპური სავარჯიშოების ნომრები, რომელთა ამოხსნები გადმოცემულია აქ. გაეცანით ამ ამოხსნებს, დანარჩენი სავარჯიშოები კი შეასრულეთ დამოუკიდებლად.

სავარჯიშოების პირობები და პასუხები იხილეთ [2]-ში.

სავარჯიშოები №

1- ა,გ,ე,თ,ნ,ჟ	**1- ბ,დ,ვ,ზ,ლ,მ,ო,პ**	**2**	**3**	**4**	**5**

ტიპური სავარჯიშოების ამოხსნა

1 - ა.

გამოვიკვლიოთ კრებადობაზე არასაკუთრივი ინტეგრალი: $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx$.

ამოხსნა: გამოსათვლელია ე.წ. „*არასაკუთრივი ინტეგრალი*“, უსასრულო შუალედზე. ვისარგებლოთ სახელმძღვანელოს 21.1 პუნქტით (გვ.262) —

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx \underset{\text{განსაზღვრებით}}{=} \lim_{N\to\infty}\left[\int_1^N\frac{1}{x^3}dx\right]=\lim_{N\to\infty}\left[\int_1^N x^{-3}dx\right]=\lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{-3+1}x^{-3+1}\right]_{x=1}^{x=N}=\lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{-2}x^{-2}\right]_{x=1}^{x=N}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{-2}N^{-2}-\frac{1}{-2}1^{-2}\right]=\lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{-2N^2}+\frac{1}{2}\right]=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

პასუხი: ინტეგრალი კრებადია; $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx=\frac{1}{2}$.

1 - გ.

გამოვიკვლიოთ კრებადობაზე არასაკუთრივი ინტეგრალი: $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$.

ამოხსნა: გამოსათვლელია ე.წ. „*არასაკუთრივი ინტეგრალი*“, უსასრულო შუალედზე. ვისარგებლოთ სახელმძღვანელოს 21.1 პუნქტით (გვ.262) —

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \underset{\text{განსაზღვრებით}}{=} \lim_{N\to\infty}\left[\int_1^N \frac{1}{\sqrt{x}} dx\right] = \lim_{N\to\infty}\left[\int_1^N x^{-1/2} dx\right] = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{-1/2+1} x^{-1/2+1}\right]_{x=1}^{x=N} = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{1/2} x^{1/2}\right]_{x=1}^{x=N}$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left[2N^{1/2} - 2\cdot 1^{-2}\right]1/2 = \lim_{N\to\infty}\left[2\sqrt{N} - 2\right] = +\infty$$

პასუხი: ინტეგრალი განშლადია; $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = +\infty$.

1 - ე.

გამოვიკვლიოთ კრებადობაზე არასაკუთრივი ინტეგრალი: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x-1} dx$.

ამოხსნა: გამოსათვლელია ე.წ. „*არასაკუთრივი ინტეგრალი*“, უსასრულო შუალედზე. ვისარგებლოთ სახელმძღვანელოს 21.1 პუნქტით (გვ.262) —)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x-1} dx \underset{\text{განსაზღვრებით}}{=} \lim_{N\to\infty}\left[\int_1^N \frac{1}{2x-1} dx\right] \underset{\substack{u=2x\text{-}1;\\ dx=0,5u}}{=} \lim_{N\to\infty}\left[\int_1^{2N-1} \frac{1}{u}\cdot 0,5du\right] = \lim_{N\to\infty}\left[0,5\int_1^{2N-1} \frac{1}{u} du\right] =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left[0,5\cdot \ln u\right]_{u=1}^{u=2N-1} = 0,5\lim_{N\to\infty}\left[\ln(2N-1) - \ln 1\right]$$

$$= 0.5\lim_{N\to\infty}\left[\ln(2N-1) - 0\right] = +\infty$$

პასუხი: ინტეგრალი განშლადია; $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x-1} dx = +\infty$.

1 - თ.

გამოვიკვლიოთ კრებადობაზე არასაკუთრივი ინტეგრალი: $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$

ამოხსნა: არასაკუთრივი ინტეგრალის განსაზღვრებით (იხ. სახელმძღვანელო, პ.21.1, გვ. 263):

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx \underset{\text{განსაზღვრებით}}{=} \lim_{N\to\infty}\left[\int_0^N e^{-x} dx\right].$$

ვისარგებლოთ ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულით (სახელმძღვანელო, პუნქტი 20.3; გვ.250). ამისათვის საჭიროა ვიცოდეთ e^{-x} ფუნქციის პირველადი. ესაა კერძო შემთხვევა e^{kx} სახის ფუნქციებისა ($k=-1$). ამ უკანასკნელის პირველადია $\frac{1}{k}e^{kx}$, რაც მოწმდება გაწარმოებით (შეამოწმეთ) . ანუ, e^{-x} ფუნქციის პირველადია $-e^{-x}$. ამიტომ დაწყებული გამოთვლები ასე დასრულდება:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{N\to\infty}\left[\int_0^N e^{-x} dx\right] = \lim_{N\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_{x=0}^{x=N} =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left[-e^{-N} + e^0\right]$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left[1 - \frac{1}{e^N}\right] = 1 - 0 = 1.$$

პასუხი: ინტეგრალი კრებადია; $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$.

1 - ნ.

გამოვიკვლიოთ კრებადობაზე არასაკუთრივი ინტეგრალი: $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$

ამოხსნა: გამოსათვლელია ე.წ. „*არასაკუთრივი ინტეგრალი*“, უსასრულო შუალედზე. ვისარგებლოთ სახელმძღვანელოს 21.1 პუნქტით (გვ.262), აგრეთვე „ნაწილობითი ინტეგრების“ ფორმულით (გვ.253) —

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx \underset{\text{განსაზღვრებით}}{=} \lim_{N\to\infty}\left[\int_0^N xe^{-x}dx\right] \underset{\text{გამოვიყ. ნაწ.ინტ.წესი}}{=} \lim_{N\to\infty}\left[\int_0^N xd\left(-e^{-x}\right)\right]=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left[x(-e^{-x})\Big|_0^N+\int_0^N e^{-x}dx\right]=\lim_{N\to\infty}\left[-Ne^{-N}-e^{-x}\Big|_0^N\right]=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left[-Ne^{-N}-e^{-N}+1\right]=\lim_{N\to\infty}\left[1-\frac{1}{e^N}-\frac{N}{e^N}\right]=$$

$$\overset{*}{=}\lim_{N\to\infty}1-\lim_{N\to\infty}\frac{1}{e^N}-\lim_{N\to\infty}\frac{N}{e^N}=1-0-0=1.$$

აქ, ბოლო ხაზზე, * ნიშნით მონიშნული ტოლობის მარჯვნივ, პირველი ზღვარი ცხადია, მეორის ზღვარი 0-ის ტოლია, რადგან მნიშვნელი უსასრულოდ დიდია (მაჩვენებლიანი ფუნქციის თვისება). მესამე ზღვარი ვიპოვოთ *ლოპიტალის წესის* გამოყენებით (მრიცხველს და მნიშვნელს ვაწარმოებთ N ცვლადით):

$$\lim_{N\to\infty}\frac{N}{e^N}=\lim_{N\to\infty}\frac{\frac{d}{dN}N}{\frac{d}{dN}e^N}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{e^N}=0.$$

პასუხი: ინტეგრალი კრებადია; $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx=1$.

1 - ჟ.

გამოვიკვლიოთ კრებადობაზე არასაკუთრივი ინტეგრალი: $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$

ამოხსნა: არასაკუთრივი ინტეგრალის განსაზღვრების თანახმად (სახელმძღვანელოს 21.1 პუნქტით, გვ.262) —

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx \underset{\text{განსაზღვრებით}}{=} \lim_{N\to\infty}\left[\int_1^N\frac{\ln x}{x}dx\right]=\lim_{N\to\infty}\left[\int_1^N \ln x\frac{dx}{x}\right]=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left[\int_1^N \ln x\, d\left(\ln x\right)\right] \underset{\substack{\text{შემოვიღოთ}\\ \text{აღნიშვნა}\\ \text{u=lnx}}}{=} \lim_{N\to\infty}\left[\int_{\ln 1}^{\ln N} u\,du\right]=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left[\frac{u^2}{2}\Big|_0^{\ln N}\right]=\frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\left[\ln^2 N\right]=+\infty.$$

პასუხი: ინტეგრალი განშლადია; $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx=+\infty$.

2.
გამოთვალეთ იმ უსასრულო მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია:
2(ა) $x=-3$ წრფით, აბსცისთა ღერძით და $y=2e^{-x}, x\ge -3$ ფუნქციის გრაფიკით;
2(ბ) აბსცისთა და ორდინატთა ღერძებით და $y=-3e^{-x}, x\ge 0$ ფუნქციის გრაფიკით.

2(ა)-ს ამოხსნა (ვარიანტი 1): *შეკუმშული ფორმით* ამოხსნა ასეთია:

$$S=\int_{-3}^{+\infty} 2e^{-x}dx=\lim_{N\to\infty}\int_{-3}^{N} 2e^{-x}dx=2\lim_{N\to\infty}\int_{-3}^{N} e^{-x}dx=$$

$$=2\lim_{N\to\infty}\left[-e^{-x}\Big|_{-3}^{N}\right]=-2\lim_{N\to\infty}\left[e^{-N}-e^{3}\right]=$$

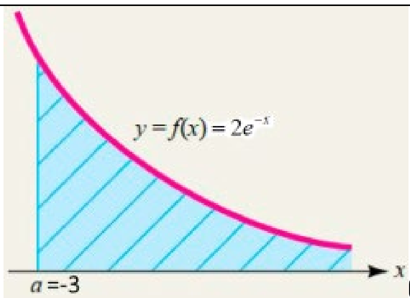
$$=-2\lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{e^N}-e^3\right]=-2(0-e^3)=2\left(2,718\right)^3\approx 40,17.$$

2(ა)-ს პასუხი: 40,17.

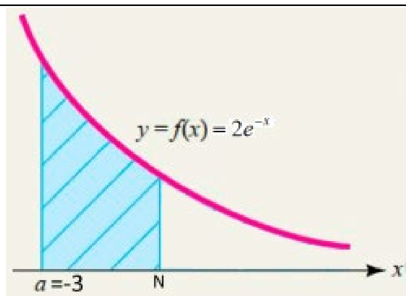
საქმეში კარგად გარკვეული დეტალებს იოლად გაშიფრავს. სხვა მკითხველისთვის ჩავატარებთ უფრო დაწვრილებით მსჯელობებს.

2(ა)-ს ამოხსნის მეორე ვარიანტი, დაწვრილებითი. ვისარგებლოთ, სახელმძღვანელოს 21.1 პუნქტში განხილული იდეებით.

ვიცით დადებითი რიცხვის ნებისმიერი ხარისხი ასევე დადებითია. ნეპერის რიცხვი e დადებითია ($e\approx 2,7$). აქედან ცხადია $y=2e^{-x}$ ფუნქციის მნიშვნელობები ცხადია დადებითია. ამიტომ მოცემულ უსასრულო მრუდწირულ ტრაპეციას აბსცისთა ღერძის ზემოთა —მას ნახ.1-ზე მოცემული დაშტრიხული ფიგურის ფორმა აქვს, რომელიც ცხადია უსასრულოდ გრძელდება მარჯვენა მიმართულებით. N წერტილზე აღმართული მართობი (ნახ.2) მას მოაჭრის სასრულ მრუდწირულ ტრაპეციას. ვიცით, მისი ფართობია $S_N=\int_a^N f(x)dx$. როცა N-ს მივასწრაფებთ $+\infty$ -კენ, ნახ.2-ზე გამოსახული დაშტრიხული ნაწილი ამოწურავს წინა დიაგრამის დაშტრიხულ ნაწილს —უსასრულო მრუდწირულ ტრაპეციას.



ნახ. 1



ნახ.2

შესაბამისად, S_N -ის ზღვარი იქნება უსასრულო მრუდწირულ ტრაპეციის ფართობი S :

$$S=\lim_{N\to\infty}S_N=\lim_{N\to\infty}\int_a^N f(x)dx=\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

მაშასადამე,

$$S=\int_a^{+\infty} f(x)dx\,.$$

ამ კონკრეტულ შემთხვევაში: $f(x)=2e^{-x}$ —

$$S=\int_{-3}^{+\infty} 2e^{-x}dx=\lim_{N\to\infty}\int_{-3}^{N} 2e^{-x}dx=2\lim_{N\to\infty}\int_{-3}^{N} e^{-x}dx$$

გამოთვლების გასაგრძელებლად, ვისარგებლოთ ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულით. ამისათვის საჭიროა ვიცოდეთ e^{-x} ფუნქციის პირველადი. ესაა კერძო შემთხვევა e^{kx} სახის ფუნქციებისა ($k=-1$). ამ

უკანასკნელის პირველადია $\frac{1}{k}e^{kx}$, რაც მოწმდება გაწარმოებით (შეამოწმეთ) . ანუ, e^{-x} ფუნქციის პირველადია $-e^{-x}$. ამიტომ, ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულით, S -ის ზემოთ შეწყვეტილი გამოთვლა ასე დასრულდება:

$$S = 2\lim_{N\to\infty}\left[-e^{-x}\Big|_{-3}^{N}\right] = -2\lim_{N\to\infty}\left[e^{-N} - e^{3}\right] =$$

$$= -2\lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{e^{N}} - e^{3}\right] = -2(0-e^{3}) = 2(2,718)^{3} \approx 40,17.$$

2(ა)-ს პასუხი: 40,17.

2(ბ)-ს ამოხსნა (ვარიანტი 1). *შეკუმშული ფორმით* ამოხსნა ასეთია:

$$S = -\int_{0}^{+\infty} -3e^{-x}dx = -\lim_{N\to\infty}\int_{0}^{N} -3e^{-x}dx = 3\lim_{N\to\infty}\int_{0}^{N} e^{-x}dx =$$

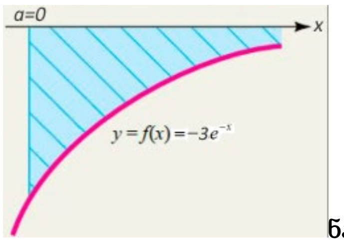
$$= 3\lim_{N\to\infty}\left[-e^{-x}\Big|_{0}^{N}\right] = -3\lim_{N\to\infty}\left[e^{-N} - e^{0}\right] =$$

$$= -3\lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{e^{N}} - 1\right] = -3(0-1) = 3.$$

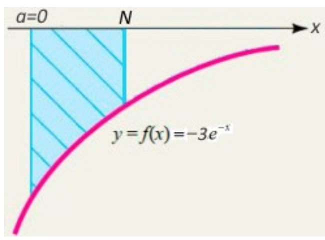
2(ბ)-ს პასუხი: 3.

საქმეში გარკვეული ადვილად მიხვდება დეტალებს. უფრო დაწვრილებითი ამოხსნა შემდეგია:

2(ბ)-ს ამოხსნის მეორე ვარიანტი, დაწვრილებით. ვიცით, დადებითი რიცხვის ნებისმიერი ხარისხი დადებითია. ნეპერის რიცხვი e დადებითია ($e \approx 2,7$). ამიტომ ცხადია $y = -3e^{-x}$ ფუნქციის მნიშვნელობები უარყოფითია. მისი გრაფიკი აბსცისთა ღერძის ქვემოთაა —უსასრულო მრუდწირულ ტრაპეციას აქვს ნახ.3-ზე გამოსახული ესკიზის ფორმა, ის უსასრულოდ გრძელდება მარჯვენა მიმართულებით. წინა შემთხვევისგან განსხვავებით აქ



ნახ. 3



ნახ.4

ნახ.4-ზე გამოსახული მოკვეთილი ტრაპეციის ფართობი სათანადო ინტეგრალის მოპირდაპირეა, ნიშნით: $S_N = -\int_{a}^{N} f(x)dx$. სხვა მსჯელობები ზუსტად ისეთივეა, რაც წინა შემთხვევაში. მათი განმეორებით და ამ ცვლილების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$S = -\int_{a}^{+\infty} f(x)dx .$$

მოცემულ კონკრეტულ შემთხვევაში $f(x) = -3e^{-x}$. ამიტომ საძიებელი ფართობისთვის გვაქვს:

$$S = -\int_{0}^{+\infty} -3e^{-x}dx = -\lim_{N\to\infty}\int_{0}^{N} -3e^{-x}dx = 3\lim_{N\to\infty}\int_{0}^{N} e^{-x}dx$$

განაგრძოთ გამოთვლები ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულით, როგორც წინა პუნქტში (ნახეთ იქ, დეტალები):

$$S = 3\lim_{N\to\infty}\left[-e^{-x}\Big|_0^N\right] = -3\lim_{N\to\infty}\left[e^{-N}-e^{0}\right] =$$
$$= -3\lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{e^N}-1\right] = -3(0-1) = 3.$$

პასუხი: (ა) 40.17; (ბ) 3.

4.
ინვესტორი, შემოუსაზღვრელი ვადით, ყოველწლიურად იღებს თანხას 5000₾ ინტენსივობით. გამოთვალეთ ამ ნაკადის საწყისი ღირებულება, თუ წლიური რთული განაკვეთია 6%, უწყვეტი დარიცხვით.

ამოხსნა. ინვესტორის მიერ t წლის გასვლის მომენტისთვის მიღებული თანხა არის $5000t$ ლარი — $f(t)=5000t$. როგორც ვიცით, საწყისი თანხა რომელიც ამ ნაკადს უზრუნველყოფს, დარიცხვის უწყვეტი წესის დროს, გამოითვლება ფორმულით (პუნქტი 21.2; გვ. 265):

$$PV = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-rt}dt\,,$$

სადაც PV საწყისი თანხაა (საძიებელი), $f(t)$ — ნაკადის მნიშვნელობა დროის t მომენტში (წლებში აღრიცხული), ხოლო r წლიური დარიცხვის კოეფიციენტი ($r = p/100$, p წლიური დარიცხვის ნომინალური საბანკო პროცენტია).
ჩვენს შემთხვევაში r პირდაპირ მოცემულია — $r = 0,06$. მაშასადამე,

$$PV = \int_0^{+\infty} 5000te^{-0,06t}dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T 5000te^{-0,06t}dt = 5000\cdot\lim_{T\to\infty}\int_0^T te^{-0,06t}dt =$$
$$= 5000\cdot\lim_{T\to\infty}\left[\int_0^T t\frac{de^{-0,06t}}{-0,06}\right] = \frac{5000}{-0,06}\lim_{T\to\infty}\left[\int_0^T tde^{-0,06t}\right] = \frac{5000}{-0,06}\lim_{T\to\infty}\left[te^{-0,06t}\Big|_0^T - \int_0^T e^{-0,06t}dt\right] =$$
$$= \frac{5000}{-0,06}\lim_{T\to\infty}\left[Te^{-0,06T} - \frac{e^{-0,06t}}{-0,06}\Big|_0^T\right] = \frac{5000}{-0,06}\lim_{T\to\infty}\left[Te^{-0,06T} + \frac{e^{-0,06T}}{0,06} - \frac{1}{0,06}\right] =$$
$$= \frac{5000}{-0,06}\lim_{T\to\infty}\left[\frac{T}{e^{0,06T}} + \frac{1}{0,06e^{0,06T}} - \frac{1}{0,06}\right]$$

აქ, ბოლო ზღვარში, მეორე შესაკრებში მნიშვნელი უსასრულოდ დიდია, როცა $T\to+\infty$. ანუ, ეს შესაკრები უსასრულოდ მცირეა. რაც შეეხება პირველს, ლოპიტალის წესით, ადვილად ვაჩვენებთ — ისიც უსასრულოდ მცირეა (T-თი გაწარმოება...):

$$\lim_{T\to\infty}\frac{T}{0,06\,e^{0.06T}} = \lim_{N\to\infty}\frac{\frac{d}{dT}T}{\frac{d}{dT}\left(0,06\,e^{0.06T}\right)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{0,0036\,e^{0.06T}} = 0\,.$$

მაშასადამე PV-ს შეწყვეტილი გამოთვლა ასე დასრულდება:

$$PV == \frac{5000}{-0,06}\cdot\left[0+0-\frac{1}{0,06}\right] = \frac{5000}{0,0036} \approx 1388888,89\,.$$

პასუხი. 1 388 888,89 ₾.